Capítulo 3

Teorema de Hahn-Banach

3.1. Introducción

Una vez introducidos los espacios vectoriales más importantes donde se tiene una estructura métrica –a saber, los espacios de Hilbert y los espacios de Banach– presentaremos sucesivamente los cuatro teoremas que son considerados como los pilares del Análisis Funcional, a saber, el Teorema de Hahn-Banach, El Principio de la Acotación Uniforme, El Teorema de la Aplicación Abierta y el Teorema del Grafo Cerrado.

En este capítulo enunciaremos y probaremos el Teorema de Hahn-Banach, que es un resultado crucial de extensión de funcionales lineales, con importantes consecuencias. Una de ellas es que el dual de cualquier espacio normado es no trivial, es decir, no se reduce a $\{0\}$, e incluso es "bastante grande", en cierto sentido. Introduciremos también el bidual de un espacio normado, así como el concepto de espacio reflexivo, del cual un espacio de Hilbert es el ejemplo más destacado.

Antes de comenzar, es conveniente recordar un instrumento fundamental en Teoría de Conjuntos, que posee múltiples aplicaciones, a saber, el *Lema de*

Zorn. Su enunciado es el siguiente: Sea $\mathcal{A}$ un conjunto parcialmente ordenado, es decir, en $\mathcal{A}$ se ha dado alguna relación de orden, la cual denotamos por "$\leq$". Supongamos que cada cadena $\mathcal{C}$ en $\mathcal{A}$ –es decir, cada subconjunto totalmente ordenado– admite una cota superior en $\mathcal{A}$, esto es, existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $x \leq \alpha$ para todo $x \in \mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{A}$ posee algún elemento maximal, o sea, existe $\gamma \in \mathcal{A}$ tal que $[\delta \in \mathcal{A}$ y $\gamma \leq \delta]$ implica $\delta = \gamma$.

3.2. El Teorema de Hahn-Banach

Partimos de un resultado de extensión algebraica. Supongamos que E es un espacio vectorial, M es un subespacio vectorial de E y $f : M \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal. No es difícil construir una extensión lineal g de f a todo E. Basta tomar una base algebraica de M y completarla hasta obtener una base de E; por último, se define g como f en M, y arbitrariamente en los nuevos vectores base, y se extiende linealmente a la variedad lineal generada por la nueva base, que es E. Lo que no es tan fácil es conseguir "controlar"la extensión lineal a E si ya había cierto control en la aplicación lineal original. Esto es lo que hace el Teorema de Hahn-Banach. Antes, necesitamos un concepto que precise qué funciones son las que ejercen el control.

Definición 3.2.1. Sea E un espacio vectorial real. Una función $p : E \to \mathbb{R}$ es un *funcional sublineal* o *subnorma* si cumple las siguientes propiedades:
(1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in E$.
(2) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para todo $x \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$.

Por ejemplo, la norma en un espacio normado X es un funcional lineal.

Teorema 3.2.2. [*Teorema de Hahn-Banach*]. *Sea E un espacio vectorial real y M un subespacio de E. Supongamos que p es un funcional sublineal sobre E, que $f : M \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo*

$x \in M$. Entonces existe una aplicación lineal $g : E \to \mathbb{R}$ tal que $g|_M = f$ y $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demostración. Consideremos la familia $\mathcal{A}$ de todas las aplicaciones h lineales y reales definidas en algún subespacio $D(h)$ de E tales que $D(h) \supset M$, $h|_M = f$ y $h(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(h)$. Esta familia es no vacía pues $f \in \mathcal{A}$. Podemos definir en $\mathcal{A}$ un orden parcial poniendo $h_1 \leq h_2$ si $D(h_1) \subset D(h_2)$ y h_2 es una extensión de h_1. Queremos aplicar el Lema de Zorn a la familia $\mathcal{A}$, dotada del orden parcial anterior.

Para ello, fijemos una cadena $\mathcal{C}$ en $\mathcal{A}$. Llamemos $D := \bigcup_{h\in\mathcal{C}} D(h)$. Ya que $\mathcal{C}$ está totalmente ordenado, se deduce que D es un subespacio vectorial de E y que la aplicación $u : D \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = h(x)$ si $x \in D(h)$ con $h \in \mathcal{C}$ está bien definida y es lineal. Es claro que $h \leq u$ para toda aplicación $h \in \mathcal{C}$. Por tanto $\mathcal{C}$ tiene una cota superior en $\mathcal{A}$. En consecuencia, $\mathcal{A}$ tiene algún elemento maximal, sea g. Entonces g es lineal, $g|_M = f$ y $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(g)$. Basta probar que $D(g) = E$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que existe algún vector $y \in E \setminus D(g)$. Sea $H = \{x+\alpha y : x \in D(g),\, \alpha \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}(D(g)\cup\{y\})$. Es evidente que H es un subespacio vectorial de E con $D \subset H$ y $D \neq H$. Además, puesto que $y \notin D(g)$, podemos extender linealmente g a H mediante la aplicación (notemos que la descomposición de cada $z \in H$ como $z = x + \alpha y$ es única) dada por

$$h : z = x + \alpha y \in H \mapsto g(x) + \alpha c \in \mathbb{R},$$

donde c es un número real fijo, pero arbitrario. Vamos a elegir c tal que $h(z) \leq p(z)$ para todo $z \in H$, con lo que llegaríamos a contradicción con la maximalidad de g.

Necesitamos que se cumpla

$$g(x) + \alpha c \leq p(x + \alpha y) \quad (x \in D(g),\, \alpha \in \mathbb{R}).$$

Esto es equivalente a

$$g\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + c \le p\left(\frac{x_1}{\alpha} + y\right) \quad (\alpha > 0,\ x_1 \in D(g)) \quad \text{y}$$

$$g\left(\frac{x_2}{\beta}\right) + c \ge \frac{1}{\beta}\, p\left(\frac{-\beta(x_2 + \beta y)}{-\beta}\right) = -p\left(-\frac{x_2}{\beta} - y\right) \quad (\beta < 0,\ x_2 \in D(g)),$$

lo cual a su vez equivale a

$$-p\left(-\frac{x_2}{\beta} - y\right) + g\left(-\frac{x_2}{\beta}\right) \le c \le p\left(\frac{x_1}{\alpha} + y\right) - g\left(\frac{x_1}{\alpha}\right).$$

Como x_1/α y $-x_2/\beta$ son puntos arbitrarios en $D(g)$, basta encontrar c tal que

$$g(u) - p(u - y) \le c \le p(v + y) - g(v) \ \text{ para todo } u, v \in D(g).$$

Ahora bien, sabemos que

$$g(u) + g(v) = g(u + v) \le p(u + v) \le p(u - y) + p(v + y),$$

de donde resulta

$$g(u) - p(u - y) \le p(v + y) - g(v) \ \text{ para todo } u, v \in D(g).$$

Por tanto $a \le b$, donde

$$a := \sup\{g(u) - p(u - y) :\ u \in D(g)\} \quad \text{y} \quad b := \inf\{p(v + y) - g(v) :\ v \in D(g)\}.$$

Tomando $c \in [a, b]$ se obtiene el resultado. □

3.3. Consecuencias del Teorema de Hahn-Banach

Recordemos que el dual de un espacio normado X se define como el espacio $L(X, \mathbb{K})$ de las formas lineales y continuas de X en el cuerpo $\mathbb{K}$.

Denotaremos el espacio dual de X por X^*. Una propiedad importante es que el dual es siempre un espacio de Banach. La primera consecuencia del Teorema de Hahn-Banach nos dice que es posible extender formas lineales y continuas manteniendo la norma.

Corolario 3.3.1. *Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $f : M \to \mathbb{R}$ una forma lineal y continua. Entonces existe $g \in X^*$ tal que $g|_M = f$ y $\|g\| = \|f\|$.*

Demostración. Definamos $p : X \to \mathbb{R}$ por $p(x) = \|f\|\|x\|$. Como la norma es sublineal, se obtiene que p es un funcional sublineal. Además $f(x) \leq |f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| = p(x)$ para todo $x \in M$. Por el Teorema de Hahn-Banach, existe una aplicación lineal $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $g|_M = f$ y $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Así $g(x) \leq \|f\|\,\|x\|$ y $-g(x) = g(-x) \leq \|f\|\,\|x\|$. Por tanto $|g(x)| \leq \|f\|\,\|x\|$ para todo $x \in X$, de donde $\|g\| \leq \|f\|$. Pero g es una extensión de f, luego $\|f\| \leq \|g\|$, con lo cual $\|g\| = \|f\|$. $\square$

Nota 3.3.2. El corolario anterior también es cierto para espacios normados sobre $\mathbb{C}$, aunque no vamos a ver la demostración.

Una segunda consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, que enunciaremos a continuación, caracteriza la clausura de un subespacio vectorial en términos de las funcionales que se anulen sobre él.

Teorema 3.3.3. *Sea M un subespacio vectorial de un espacio normado X. Supongamos que $x_0 \in X$. Entonces $x_0 \in \overline{M}$ si y sólo si cada funcional $f \in X^*$ tal que $f|_M \equiv 0$ se anula en x_0.*

Demostración. Por continuidad, es claro que si $x_0 \in \overline{M}$ y $f : X \to \mathbb{K}$ es continua y se anula en M, entonces $f(x_0) = 0$. Recíprocamente, supongamos que $x_0 \notin \overline{M}$. Hemos de encontrar un funcional $f \in X^*$ con $f|_M \equiv 0$ pero tal que $f(x_0) \neq 0$.

Para ello, fijemos $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \cap M = \emptyset$. Entonces $\|x - x_0\| \geq \delta$ para todo $x \in M$. Sea $\widehat{M}$ el subespacio generado por M y x_0, es decir, la suma algebraica de M y la recta $\langle x_0 \rangle$ de los múltiplos escalares de x_0. Nótese que la suma es directa, es decir, $M \cap \langle x_0 \rangle = \emptyset$. Por tanto, la aplicación $f : X \to \mathbb{K}$ dada por $f(x + \lambda x_0) = \lambda$ está bien definida y, obviamente, es lineal. Por otra parte, es continua en M con norma $\leq 1/\delta$. En efecto, si $x \in M$ y $\lambda \neq 0$, se tiene $\|x+\lambda x_0\| = |\lambda| \, \|x_0 + \lambda^{-1} x\| \geq |\lambda|\delta$. En consecuencia, $|f(x + \lambda x_0)| = |\lambda| \leq \delta^{-1}\|x + \lambda x_0\|$ para todo $x \in M$ y todo escalar λ, luego $\|f\| \leq 1/\delta$. Además, es obvio que $f|_M \equiv 0$ y $f(x_0) = 1$. Basta ahora extender f a un funcional en el dual X^*, de acuerdo con el Corolario 3.3.1. $\square$

Corolario 3.3.4. *Si M es un subespacio vectorial cerrado de un espacio normado X y $x_0 \in X$, entonces $x_0 \in M$ si y sólo si todo funcional lineal y continuo $f : X \to \mathbb{R}$ que se anula en M se anula en x_0.*

Seguidamente, veremos en una tercera consecuencia cómo es posible encontrar una funcional lineal y continua cuyo "tamaño" está determinado por su valor en un punto.

Teorema 3.3.5. *Si X es un espacio normado y $x_0 \in X \setminus \{0\}$, entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y tal que $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Demostración. Sea $M = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{K}\}$ y definamos $g : M \to \mathbb{K}$ como $g(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$. Entonces g es una aplicación lineal y continua sobre M, y cumple $\|g\| = 1$, $g(x_0) = \|x_0\|$. Por el Corolario 3.3.1, podemos extender g a un funcional $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\| = 1$ y $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|$. $\square$

Como consecuencia del teorema anterior, obtenemos que, si $X \neq \{0\}$, entonces $X^* \neq \{0\}$. De hecho, el dual X^* *separa puntos* de X, es decir, si $x_1, x_2 \in X$ y $x_1 \neq x_2$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. En efecto, basta tomar el vector $x_0 := x_1 - x_2$ en el teorema anterior.

En el caso especial de un espacio de Hilbert, sabemos, gracias al Teorema de Riesz, que existe una biyección entre H y H^*, dada por $y \mapsto T_y$, donde $T_y(x) := (x|y)$. Es más, dicha biyección es una isometría lineal que permite identificar H y H^* (Teorema 2.3.5).

3.4. Bidual. Espacios reflexivos

La identificación $H \equiv H^*$ mencionada en el párrafo anterior no sucede en otros espacios de Banach. Sin embargo, podemos obtener una identificación parcial usando biduales, tal como se verá seguidamente.

Si X es un espacio de Banach y X^* es su dual, el *bidual* de X se define como $X^{**} := (X^*)^*$. Consideremos la aplicación $\varphi : X \to X^{**}$ dada por $\varphi(x)(f) = f(x)$ para todo $f \in X^*$. Fácilmente se observa que φ es lineal. Por otra parte, si $x \in X$ y denotamos por $\|\cdot\|_{**}$ la norma en X^{**}, resulta

$$|\varphi(x)(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|, \quad \text{luego} \quad \|\varphi(x)\|_{**} \leq \|x\|.$$

Consideremos ahora un funcional $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ tal que $f(x) = \|x\|$. Entonces

$$|\varphi(x)(f)| = |f(x)| = \|f\| \, \|x\|, \quad \text{y por tanto} \quad \|\varphi(x)\|_{**} \geq \|x\|.$$

Deducimos que $\varphi : X \to \varphi(X) \subset X^{**}$ es una isometría. Decimos que el espacio X es *reflexivo* cuando φ es sobreyectiva. En tal caso podemos identificar X con su bidual X^{**}.

Por ejemplo, todo espacio de Hilbert H es reflexivo. En efecto, H puede identificarse con H^* por el Teorema de Riesz. A su vez, H^* puede identificarse con H^{**}, luego $H \equiv H^{**}$. De hecho, con las notaciones anteriores, se tiene que $\varphi(y)(T_x) = T_{T_y}(T_x)$ para todo $x, y \in H$.

Mas no todo espacio reflexivo es de Hilbert, como mostraremos en el siguiente ejemplo, con el que concluimos este capítulo. No obstante, ya que el dual de un espacio normado es de Banach, deducimos que todo espacio reflexivo es un espacio de Banach.

Ejemplo 3.4.1. Sea $p \in (1, +\infty)$. Entonces l_p^* es isométricamente isomorfo a l_q, donde q es el exponente conjugado de p, es decir, el número $q \in (1, +\infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En efecto, sea $y = (y_k) \in l_q$. Consideremos la aplicación $\Lambda : y \in l_q \mapsto \Lambda_y \in l_p^*$ dada por

$$\Lambda_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \quad \text{si} \quad x = (x_k).$$

Esta aplicación está bien definida. En efecto, gracias a la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$|\Lambda_y(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q} \leq \|y\|_q \|x\|_p.$$

Luego Λ está bien definida, pues cada Λ_y es, claramente, lineal, y es continua con $\|\Lambda_y\| \leq \|y\|_q$. Si se aplica al vector $x = (\alpha_n)$, dado por

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{|y_n|^q}{y_n} & \text{si} \quad y_n \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y_n = 0, \end{cases}$$

resulta que $x \in l_p$ (pues $|\alpha_n|^p = |y_n|^q$) y

$$|\Lambda_y(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{(q-1)p} \right)^{1/p} \|y\|_q = \|x\|_p \|y\|_q,$$

de donde obtenemos $\|\Lambda_y\| = \|y\|_q$ para todo $y \in l_q$. Así que Λ es una isometría lineal. Basta ver que Λ es sobreyectiva.

Para ello, fijemos $\Delta \in l_p^*$. Hemos de hallar un vector $y \in l_q$ tal que $\Lambda_y = \Delta$. Definimos $y = (y_n) = (\Delta(e_n))$, donde los e_n son los vectores $(0, 0, \dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ de la base canónica de l_q. Definamos los números α_n como antes, y fijemos $m \in \mathbb{N}$. Tenemos:

$$\sum_{n=1}^{m} |y_n|^q = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n y_n = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \Delta(e_n) = \Delta\left(\sum_{n=1}^{m} \alpha_n e_n\right)$$
$$\leq \|\Delta\| \left(\sum_{n=1}^{m} |\alpha_n|^p\right)^{1/p} = \|\Delta\| \left(\sum_{n=1}^{m} |y_n|^q\right)^{1/p}.$$

Por tanto

$$\left(\sum_{n=1}^{m} |y_n|^q\right)^{1/q} \leq \|\Delta\| = \text{ constante } < +\infty \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q < +\infty$, así que $y \in l_q$. Es suficiente mostrar que $\Lambda_y = \Delta$. Esto es fácil, pues ambas aplicaciones coinciden sobre $A := \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ y, por linealidad, coinciden sobre $\operatorname{span} A$. Finalmente, por continuidad, coinciden sobre $\overline{\operatorname{span}}\, A$, que es todo l_p: en efecto, si $x = (x_n) \in l_p$, entonces la sucesión de vectores de l_p dada por $z_m = \sum_{n=1}^{m} x_n e_n$ $(m \in \mathbb{N})$ cumple $\|z_m - z\|_p^p = \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p \to 0$ $(m \to \infty)$, pues la última suma es el resto de una serie convergente. En conclusión, Λ es sobreyectiva, como se requería.

Puesto que la relación de conjugación de exponentes es simétrica, se deduce que l_q^* es isométricamente isomorfo a l_p, luego l_p^{**} puede identificarse a l_p, y obtenemos que l_p es reflexivo.

Sin embargo, el espacio de Banach c_0 no es reflexivo, pues su dual es isométrico a l_1, cuyo dual, a su vez, es isométrico a l_∞. Ya que c_0 es separable y l_∞ no lo es, estos espacios no pueden ser isométricos.